Tarefa da Aula 6: Princípio da Casa dos Pombos e Permutação Caótica  
  
6. Dados doze inteiros, mostre que é possível escolher dois deles de modo que sua diferença seja divisível por 11.  
  
Resolução: A e B , queremos que A – B . Ou seja, que A e B tenham o mesmo resto quando divididos por 11. Os restos possíveis por 11 é de 0 a 10, as nossas 11 gaiolas. E temos 12 números inteiros, nossos 12 pombos. Pelo princípio da casa dos pombos, é garantido que haverá pelo menos 2 números com o mesmo resto por 11, logo a diferença deles será divisível por 11.

15. Prove que, dados 52 inteiros arbitrários, é sempre possível encontrar dois deles tais que a diferença de seus quadrados é divisível por 100.  
  
Resolução: Vamos provar por absurdo (assumir que o enunciado está errado). Sendo A e B inteiros arbitrários, Uma forma de averiguar se é divisível por 100 é verificar se o fator 100 aparece em (A+B) ou em (A-B). Sendo a e b tal que , ou seja, o resto de A e B por 100.   
 i) Não queremos que , então .  
 ii) Não queremos que Como , temos que:  
 . Então Ou seja, se existir um número com resto 1, não pode existir um número com resto 99, se existir um número com resto 2, não pode existir um número com resto 98, e assim vai até um com resto 49 e um com resto 51.  
Então, para satisfazer o item ii), vamos assumir apenas os valores com resto entre 0 e 50, assim nenhum resto somado dará 100. Entretanto, como temos 52 inteiros (os pombos) e 51 possibilidades de resto (as gaiolas), pelo PCP podemos afirmar que existirá dois números com o mesmo resto, o que acabaria sendo divisível por 100 por causa do item i), o que é uma contradição.

Existe fórmula para permutação caótica com apenas 2 elementos repetidos? Se sim, qual a dedução?  
  
Resolução: Existe, mas não é nada simpática. Então o importante da resolução será entender o que foi feito para chegar nela. Além disso, n tem que ser maior que 3.  
 Sabemos a fórmula da permutação caótica, todos os elementos distintos, de n elementos, vamos denotar de como a permutação caótica de n elementos (porque em inglês é derangements).  
 Podemos visualizar essas permutações como quase o que queremos. Dado a sequência dos n elementos distintos como , podemos pensar em mudar , criando . Após fazer essa mudança, teremos que corrigir as soluções, porque agora i) as permutações caóticas que começam em na verdade começam em e ii) as que terminam em agora terminam em , e iii) a interseção dos dois casos. E após remover esses casos, dividiremos por 2! porque para cada solução restante, a ordem de e está sendo considerada sendo que os dois são iguais.

i) começando em :  
Fixando na primeira posição, sobra n – 1 elementos em que n – 2 elementos podem ocupar a mesma posição da sequência original (não pode porque já está fixado na primeira posição). De forma análoga a demonstração da fórmula da permutação caótica, do total (n-1)! vamos remover os que ficam na posição original. Iremos fixar 1 elemento na posição original e permutar o resto, depois remover quando fixamos 2 elementos e permutamos o resto, depois somar quando fixamos 3 elementos e permutamos o resto... Só que dessa vez nem todos podem ser fixados na posição original. Então, o número de casos é .(n-1-i)!..  
Esclarecimento da fórmula : A fórmula está em função de n, mas poderíamos colocar em função de T, sendo T o número de elementos que estamos permutando (T = n -1), e sabemos que podemos fixar T – 1 = n – 2 elementos. Como a cada etapa escolhemos i elementos para fixar, é usado a fórmula da combinação (ordem não importa). O é uma forma de mostrar que estamos alternando entre somar e subtrair a quantidade calculada (compensando a repetição de quando fixamos um elemento e permutados o resto). Removemos esses valores de (n-1)! pois esse é o total de permutações possíveis (já que o primeiro elemento tá fixado), e a somatória calcula as que não queremos (as que estão na posição original).  
  
ii) terminando em :  
Fixando na última posição, sobra n – 1 elementos em que n – 2 elementos podem ocupar a mesma posição da sequência original (não pode porque já está fixado na última posição). Ou seja, é um caso igual ao item i), então de forma análoga chegamos que o número de casos é .(n-1-i)!..  
  
iii) começando em e terminando em   
Fixando na primeira posição e na última posição, sobra n – 2 elementos distintos em que todos podem ocupar a mesma posição da sequência original. Ou seja, é uma permutação caótica desses n – 2 elementos. Então o número de casos é .  
  
Então a união dos casos que não queremos é dado por i) + ii) – iii). Iremos remover esses casos dos casos, ficando:  
 = – (2.(n-1-i)!. - )  
= .(n-1-i)!.   
= .(n-1-i)!.

Agora o que temos são permutações como, para n = 5, e . Como , essas duas soluções são a mesma: . Por cada solução estar sendo repetida 2 vezes, iremos dividir as solução encontradas em 2!. Denotando como a fórmula para permutação caótica de n elementos com apenas 1 elemento aparecendo duas vezes, então, finalmente, a fórmula ficaria:

(Fórmula testada usando programação)